Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2.$$

Initialisation

Vérifions $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$ pour $n = 0$.

En effet, $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} 2i + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1^2 = 1$.

Hérédité

Supposons $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$ (hypothèse de récurrence) pour un entier naturel n fixé, et montrons qu'alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 = ((n+1)+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 &= \left(\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 \right) + 2(n+1) + 1 \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 + 1 \\
&= n^2 + 4n + 4 \\
&= (n+2)^2 \\
&= ((n+1)+1)^2
\end{aligned}$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n.

Cours

Soit l un nombre réel et soit (u_n) une suite de nombres réels.

1) β désigne $-\infty$, ou $+\infty$, ou l, ou l^-, ou l^+.

   Définition, en une seule phrase en français, de la suite (u_n) de nombres réels tend vers β.

   Pour tout voisinage I de β, il existe un rang N à partir duquel le terme u_n appartient à I.

2) a) Définition symbolique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; u_n \in]-\infty; b[$$

   b) Définition symbolique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; u_n \in]b; +\infty[$$

   c) Trois définitions symboliques équivalentes de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

   -
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; u_n \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$$

   -
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; d\left(u_n; l\right) < \epsilon$$

   -
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; |u_n - l| < \epsilon$$

   d) Définition symbolique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l^-$.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; u_n \in]l-\epsilon; l]$$

   e) Définition symbolique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l^+$.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \; \Rightarrow \; u_n \in [l; l+\epsilon[$$

1) $u_n \in]-\infty ; -10000[$

$\iff u_n < -10000$

$\iff -3n^2 + 4n + 1 < -10000$

$\iff -3n^2 + 4n + 10001 < 0$

Signe de $-3x^2 + 4x + 10001$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 10001$

$= 120\,028$

$\Delta > 0$:

$-3x^2 + 4x + 10001$ admet deux racines

$s = \dfrac{-4 - \sqrt{\Delta}}{2 \times (-3)} = \dfrac{4 + \sqrt{\Delta}}{6} \simeq 58{,}4$

$s' = \dfrac{-4 + \sqrt{\Delta}}{2 \times (-3)} = \dfrac{4 - \sqrt{\Delta}}{6} \simeq -336{,}4$

x	$-\infty$		s'		0		s		$+\infty$
$-3x^2 + 4x + 10001$		$-$	0		$+$		0	$-$	

Par suite, sachant $n \in \mathbb{N}$,

$-3n^2 + 4n + 10001 < 0$

lorsque $n \geqslant s$ soit $n \geqslant 59$.

2) $v_n = \dfrac{n}{n+1}$

$v_n \in]1-0,01 ; 1+0,01[$

$\iff 1-0,01 < v_n < 1+0,01$

$\iff -0,01 < v_n - 1 < 0,01$

$\iff -0,01 < \dfrac{n}{n+1} - 1 < 0,01$

$\iff -0,01 < \dfrac{n-(n+1)}{n+1} < 0,01$

$\iff -0,01 < \dfrac{-1}{n+1} < 0,01$

$\iff -0,01 < \dfrac{-1}{n+1}$ (car $\dfrac{-1}{n+1} < 0,0$ toujours vrai

$\iff 0,01 > \dfrac{1}{n+1}$

$\iff \dfrac{1}{0,01} < n+1$

$\iff n+1 > 100$

$\iff n > 99$

$\iff n \geq 100$

1)

```python
from math import *
b=float(input("b? "))
n=0
w=5
while w<=b:
  n=n+1
  w=n**3+2*n+5
print(n)
```

2) Pour b=100000, la calculatrice renvoie N=47.